♣ ♢ **Test d'entrée en CPGE ECS premiére année au lycée Descartes** $1,5h.$ ♡ ♠.

Ce test est destiné aux éléves du systéme marocain en classe de terminale sciences mathématiques. .

Mercredi 10 avril 2019 **Epreuve de mathématiques.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La rédaction se fera exclusivement en langue française.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1 *.On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$*

1. *Soit n un entier naturel non nul. Calculer, pour tout réel u, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{iku}$*
2. *Montrer que si $u \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi, l \in \mathbb{Z}\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}u\right)\sin\left(\frac{n}{2}u\right)}{\sin(\frac{u}{2})}$*

Exercice 2 *On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ alors $x^a = e^{a\ln(x)}$.*
Pour tout réel $a > 0$, on définit la fonction f sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ -\dfrac{x^a}{\ln(x)} \text{ sinon} \end{cases}$$

1. (a) *Vérifier que f est continue sur $[0,1[$.*
   (b) *Montrer que f est dérivable en 0 si seulement si $a \geq 1$. Donner $f'(0)$ dans ce cas.*
   (c) *Si $a \in]0,1[$, que peut-on dire de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse 0 ?*
   (d) *Calculer f' et dresser le tableau de variations de f (on précisera la limite en 1).*
2. (a) *Montrer que f induit une bijection sur $[0,1[$. On note φ la bijection réciproque.*
   (b) *Sur quel intervalle φ est-elle définie ? continue ?*
   (c) *La fonction φ est-elle dérivable en 0 si $a \geq 1$? Et si $a \in]0,1[$?*

Exercice 3 *On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$.

1. (a) *Calculer* I_0.
   (b) *Calculer* $I_0 + I_1$.
   (c) *En déduire* I_1.
2. (a) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *exprimer* $I_n + I_{n+1}$ *en fonction de* n.
   (b) *Prouver que pour tout entier naturel* n *on a* $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+2}$.
   (c) *Étudier la convergence de la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et préciser sa limite.*
3. (a) *Montrer que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^\star$, *on a* $2(-1)^{n-1}I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.
   (b) *En déduire la limite de la suite de terme général* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
4. *À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :* $I_n = \dfrac{1}{4(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}dx$